# 641. 境界點ガ regular ナルタメノ一條件

井上　正雄（阪大）

境界点ガ regular（Dirichlet ノ問題ニ関シテ）ナルタメノ一充分條件ヲ與ヘルノガ目的デアル（平面ノ場合）。ソノタメ先ヅ次ノ豫備定理ヲ証明シテオカウ。

豫備定理：　$|z|<R$ ナル円ニ線分 $l_r: 0 \leqq z \leqq r < R$ ナル cut ヲ入レタ領域ヲ $D_r$ デ表ハシ，$l_r$ 上デ 0，$|z|=R$ 上デ $\infty > \alpha > 0$ ナル値ヲトル $D_r$ デノ調和函数ヲ $\omega(z; D_r)$ トスル。

$\varphi(r)$ ヲ $0 \leqq r \leqq 1$ デ定義サレタ $\overline{\lim_{r \to 0}} \dfrac{\varphi(r)}{r} < \infty$ ナル條件ヲ満足スル正ノ實数値函数トスル。

シカルトキ

$$\lim_{r \to 0} \omega(-\varphi(r); D_r) = 0$$

証明：　$|z| < \dfrac{R}{r}$ ナル円ニ線分 $l_1: 0 \leqq z \leqq 1$ ナル cut ヲ入レタ領域ヲ $D^r$ デ表ハシ，$l_1$ 上デ 0，$|z| = \dfrac{R}{r}$ 上デ $\alpha$ ナル値ヲトル調和函数ヲ $\omega(z; D^r)$ トスレバ

$$\omega\left(\frac{z}{r}; D^r\right) = \omega(z; D_r)$$

更ニ全平面カラ線分 $l_1$ ヲ除イタ単一連結領域ヲ $\infty \to 0$ ナル如ク $\zeta$－平面上ノ単位円 $|\zeta|<1$ ニ等角ニ寫像スル函数ヲ $\zeta = f(z)$ トシ，コノ函数ニヨツテ $|z| = \dfrac{R}{r}$ ノ移ル曲線ヲ $C_r$ トスル。$|\zeta|=1$，$C_r$ デ囲レタ領域ヲ $\mathcal{D}_r$ トシ，$|\zeta|=1$ デ 0，$C_r$ 上デ $\alpha$ ナル値ヲトル $\mathcal{D}_r$ デノ調和函

数ヲ $\omega(\zeta;\mathfrak{D}_r)$トスレバ

$$\omega(z;D_r)=\omega\left(\frac{z}{r};D^r\right)=\omega\left(f\left(\frac{z}{r}\right);\mathfrak{D}_r\right)$$

従ッテ

$$\omega(-\rho(r);D_r)=\omega\left(-\frac{\rho(r)}{r};D^r\right)=\omega\left(f\left(-\frac{\rho(r)}{r}\right);\mathfrak{D}_r\right)$$

$C_r$ ノ直徑ヲ $2d_r$ トスルトキ, $C_r\rightarrow\{a\}$ 且ツ假定ヨリ

$\overline{\lim\limits_{r\to 0}}\dfrac{\rho(r)}{r}<\infty$ ナル故充分小ナルスベテノ $r$ ニ對シ

$$\left|f\left(-\frac{\rho(r)}{r}\right)\right|>d_r,$$

且ツ $\quad \omega\left(f\left(-\dfrac{\rho(r)}{r}\right);\mathfrak{D}_r\right)\leqq\alpha\dfrac{\log\dfrac{\rho(r)}{r}}{\log d_r}$

シカルニ

$$\lim_{r\to 0}\alpha\frac{\log\frac{\rho(r)}{r}}{\log d_r}=0$$

ナル故

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\ \omega(-\rho(r);D_r)=\overline{\lim_{r\to 0}}\ \omega\left(f\left(\frac{-\rho(r)}{r}\right);\mathfrak{D}_r\right)\leqq 0$$

シカルニ常ニ $\omega(-\rho(r);D_r)\geqq 0$ ナル故

結局 $\quad \lim\limits_{r\to 0}\omega(-\rho(r);D_r)=0$ （証明了）

サテ次ノ定理ヲ証明シヤウ。

定理: D ノ境界点 $p$ ニ対シ次ノ如キ D ノ境界点列 $\{p_n\}$ が撰ベルナラバ $p$ ハ regular デアル:

1° $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p$

2° $\rho(E_D,p_n)>0$ [1] （註. 次葉へ）

3°. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|p-p_n|}{\rho(E_{D,p_n})} < \infty$

コヽニ $\rho(E_{D,p_n})$ ハ $E_{D,p_n}$ ノ原点ヲ端点トスル線分ノ長サヲ表ハスモノトス。

証明： Dノ境界F上ニ任意ニ連続函数(實) $f(z)$ ヲ與ヘル。$f(z)$ ニ関スルDノ *Dirichlet* ノ問題ニ對スル *generalised solution* ヲ $U(z)$ トスルトキ

$$\lim_{z\to p} U(z) = f(z)$$

ナルコトヲ証明スレバヨイ。

任意ニ $\varepsilon > 0$ ヲ與ヘタトキ

$|p-z| < \delta$ ナラバ，$z \in F$ ニ對シテ $|f(z)-f(p)| < \varepsilon$ ナル如キ $\delta (>0)$ ガ定ル。シカラバ勿論 $|p-z| < \delta, |p-p'| < \dfrac{\delta}{2}$ ナラバ

$$|f(p')-f(p)| < 2\varepsilon, \quad \text{但シ } p' \in F$$

次ニ

$$\underset{|p-p'|<\frac{\delta}{2},\, |p-z| \geqq \delta,\, z\in F}{O.G.} \left| \frac{f(p')-f(z)}{p'-z} \right| = M$$

ナル有限値 $M(>0)$ ヲ定メルコトが出来ル。

シカルトキ $z \in F$, $|p-p'| < \dfrac{\delta}{2}$ ニ對シテハ

$$f(p') - M|p'-z| - 2\varepsilon < f(z) < f(p') + M|p'-z| + 2\varepsilon$$

充分大ナル $n$ ニ對シ $p_n$ ハ $|p-p_n| < \dfrac{\delta}{2}$ トナルカラ，オ

---

1) コノ條件カラ *Beurling* ノ定理(本誌93号419)ニヨッテ $p_n$ が *regular* ナ境界点ナルコトが判ル。

カル $p_n$ ヲ $p'$ ト考ヘレバ

$$f(p_n)-M|p_n-z|-2\varepsilon<f(z)<f(p_n)$$
$$+M|p_n-z|+2\varepsilon$$

次ニ D ノ境界点 $z$ ニヲイテ $|z-p_n|$ ナル値ヲ與ヘタトキノ D ニ関スル Dirichlet ノ問題ノ generalised solution ヲ $V_n(z)$ トスレバ，$f(p_n)+MV_n(z)+2\varepsilon$ ハ D 内デ有界調和函数デアリ且ツ D ノ regular ナ境界点ニ於テ

$$|p_n-z|=V_n(z)$$

デアルカラ談話 636 ニ於イテナシタ第一ノ注意ニヨリ

$$f(p_n)-MV_n(z)-2\varepsilon<U(z)<f(p_n)+MV_n(z)+2\varepsilon,$$
$$z\in D$$

D ノ projection ヲ作ルベキ $\zeta$ ー平面上ニ充分大ナル円 $E(|\zeta|\leqq R)$ ヲ画キ，スベテノ $E_{D,p_n}$ ガコノ円内ニ入ルヤウニスル。

コノ円 $E=E_{D,p_n}$ ノウチ原点ニ達スル線分（假定 2° ニヨリ存在スル）ニ沿ッテ cut ヲ入レタ領域ヲ $\Delta_n$ トシ，コノ境界点 $\zeta$ デ $|\zeta|$ ナル値ヲトル $\Delta_n$ デノ調和函数ヲ $v_n(\zeta)$ トスレバ談話 636 ニ於テ証明シタ通リ

$$V_n(z)\leqq v_n(-|p_n-z|)$$

トナル。

依ツテ

$$f(p_n)-Mv_n(-|p_n-z|)-2\varepsilon<U(z)$$
$$<f(p_n)+Mv_n(-|p_n-z|)+2\varepsilon.$$

サテ

$1^\circ$ $\lim_{n\to\infty}\rho(E_{D,p_n})=\eta>0$ ノトキノ証明[2)]

コノトキハ $E=\text{cut}:\ 0\leqq\xi\leqq\eta-\mu$, コヽニ $\mu$ ハ充分小ナル正数, ヲ入レタ領域ヲ $\Delta$ トシ, コノ境界点 $\xi$ ニテ $|\xi|$ ナル値ヲトル調和函数ヲ $v(\xi)$ トスレバ充分先ノスベテノ $n$ ニ對シ

$$v_n(\xi)\leqq v(\xi)$$

故ニ

$$f(p_n)-M\,v(-|p_n-z|)-2\varepsilon<U(z)$$
$$<f(p_n)+M\,v(-|p_n-z|)+2\varepsilon$$

$$\therefore\quad f(p)-M\,v(-|p-z|)-2\varepsilon\leqq U(z)$$
$$\leqq f(p)+M\,v(-|p-z|)+2\varepsilon.$$

シカルニ $\lim_{z\to p}v(-|p-z|)=0$ ナル故

$$f(p)-2\varepsilon\leqq\underline{\lim_{z\to p}}\,U(z)\leqq\overline{\lim_{z\to p}}\,U(z)\leqq f(p)+2\varepsilon.$$

$\varepsilon$ ハ任意デアッタカラ結局 $\lim_{z\to p}U(z)=f(p)$

$2^\circ$ $\lim_{n\to\infty}\rho(E_{D,p_n})=0$ ノトキノ証明.

適當ニ D ノ内点ノ系列 $\{z_n\}$ ヲ撰ビ $\lim_{n\to\infty}z_n=p$ 且

$$\lim_{n\to\infty}U(z_n)=\overline{\lim_{z\to p}}\,U(z)$$

ナラシメルコトが出來ル。

$\Delta_n$ ノ $|\xi|=R$ ナル境界点デ $R,\ \text{cut}:\ 0\leqq\xi\leqq\rho(E_{D,p_n})$

---

2) 談話 603 デナシタノト何等変リハナイ。

上デ0ナル値ヲトル$\triangle_n$内デノ調和函數ヲ $\omega_n(\xi)$トスレバ

$$\omega_n(\xi)+\rho(E_D, p_n) \geqq v_n(\xi)>0$$

シカルニ假定ニヨリ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|p_n-p|}{\rho(E_D,p_n)}<\infty$ デアルカラ，豫備

定理ニヨリ，充分大ナルスベテノ$n$ニ對シ

$$\omega_n(-|p_n-p|)<\frac{\varepsilon}{M}$$

ナラシメ得ル。

$n$ヲ充分大キクトリ更ニ $|f(p_n)-f(p)|<\varepsilon$ 且ツ

$\rho(E_D, p_n)<\dfrac{\varepsilon}{M}$ ナル如キ一ツノ $p_n$ ヲ固定スル。コノ $p_n$

ニ對シ $|\lambda|<\tau$ （$\lambda$ハ複素數）ナラバ

$$\omega_n(-|p_n-p|+\lambda)<\frac{\varepsilon}{M}$$

ナル如キ正數$\tau$ガ存在スル。

シカルトキ$p$ヲ中心トシテ$\tau$ヲ半徑トスル円ヲ画ケバ，

充分先ノスベテノ $z_i$ ハコノ円内ニ入ル。カヽルスベテノ$z_i$

ニ對シテハ

$$f(p_n)-M\{\omega_n(-|p_n-z_i|)+\rho(E_D, p_n)\}-2\varepsilon<U(z_i)$$

$$<f(p_n)+M\{\omega_n(-|p_n-z_i|)+\rho(E_D,p_n)\}+2\varepsilon,$$

即チ

$$f(p)-5\varepsilon<U(z_i)<f(p)+5\varepsilon.$$

故ニ

$$f(p)-5\varepsilon\leqq\overline{\lim_{z\to p}}\,U(z)\leqq f(p)+5\varepsilon.$$

$\varepsilon$ハ任意デアッタカラ，結局

$$\overline{\lim_{z \to p}}\, U(z) = f(p).$$

全ク同様ニシテ

$$\underline{\lim_{z \to p}}\, U(z) = f(p).$$

依ッテ

$$\lim_{z \to p} U(z) = f(p).$$

即チ $p$ ハ regular ナ境界点デアル。　（証明了）

境界点ガ regular ナルタメノ必充條件トシテ Wiener, Bouligaud 等ノ條件ガアルガ、コノ談話デハ直観的ニワカリ易イ幾何學的ナ一性質カラ境界点ノ regularity ヲ導キ出サントシタモノデアル。カヽル條件トシテ Raynor[3) ]及ビ Beurling[4)]ノ條件ガアル。

Raynor ノハ判定スベキ境界点 $p$ ノ近傍ニヲケル状態ニヨルモノデアルガ円ヲ考ヘル点ガ少シクアキ足ラナイ。Beurling ノハ $p$ ニ於イテ作ル D ノ projection ニヨルモノデアル。コノ談話デ與ヘタ一條件ハコノ中間ヲ行クソノ点ノ近傍ニ於ケル境界点ニテ作ッタ projection ニヨルモノデアリ談話 419, 609 ニ於イテ作ッタ例ハコノ條件ニ皆當嵌ルノデアル。

猶コノ條件ガ必要デナイコトハ例ヘバ Cantor ノ点集合

---

3) 本誌 137 号 609, 142 号 629.

4) 本誌 93 号 419.

ヲ境界ニモツモノヲ考ヘテ見レバヨイ。